Curriculum Vitae : candidature à un poste de Professeur des Universités/Maître de conférence

Baptiste Devyver

Dans ce dossier, vous trouverez :

Cursus

INFORMATIONS PERSONNELLES

Date de naissance : 12 avril 1985

Nationalité : Française

Adresse professionnelle :
Department of Mathematics
Technion
Haifa 32000 (Israel)

Courriel : devyver@technion.ac.il

Page web : https ://devyver.net.technion.ac.il

ÉDUCATION ET EMPLOIS

2015-présent	**Maître de conférence** (Assistant Professor) au Technion (Israel)
2014-2015	**Post-doc** à l'University of British Columbia (Vancouver, Canada)
2011-2014	**Post-doc** au Technion – Israel Institute of Technology (Haifa, Israel)
2008-2011	**Thèse** à l'Université de Nantes (France) Directeur de thèse : Gilles Carron Titre : "Opérateurs de Schrödinger et transformée de Riesz sur les variétés complètes non-compactes".
2007-2008	Master 2 à Orsay (mention très bien)
2006	Agrégation de Mathématiques (rang : 37)
2004-2008	Élève à l'École Normale Supérieure de Cachan (Rennes)
2004-2006	License de Maths. et Physique, Master de Maths. à l'Université Rennes 1.

Responsabilités scientifiques

- Rapporteur pour diverses revues : J. Math. Pures et Appliquées, Rev. Math. Ibero., Indiana Math. J., Israel J. Math., J. Diff. Geom., Calc. Variations and PDE, etc.
- (2017) Encadrement pendant un semestre de 3 étudiants en début de Master sur un projet de recherche concernant les surfaces minimales.
- (2016, 2017) Co-organisation d'une semaine d'initiation à la recherche pour des étudiants israéliens prometteurs en fin de License (environ 40 étudiants par an, venant de toutes les universités).
- Rapporteur pour une thèse de Master (M. Bersudsky), et une thèse de Doctorat (E. Calderón).
- (2017) Encadrement d'un post-doc pendant un an (M. Mukherjee) ; Mayukh est actuellement Assistant Professor en Inde au India Institute of Technology - Bombay.
- Organisateur d'une conférence : "Geometric Aspects of Harmonic Analysis and Spectral Theory", Technion, juin 2019.
- (2015-2016) Organisateur du séminaire d'EDP au Technion.
- (2018) co-organisateur d'une compétition de mathématiques type "Olympiades" pour les étudiants de collèges et lycées israéliens.

Courte présentation des activités de recherche

Mots-clef

- analyse sur les variétés
- analyse harmonique
- équation de la chaleur
- inégalités de Hardy
- géométrie spectrale
- surfaces minimales

Mes activités de recherche sont, dans un sens large, en analyse et analyse harmonique, et en théorie spectrale, bien souvent dans un contexte géométrique, c'est-à-dire sur des variétés Riemanniennes. On peut distinguer principalement trois axes de recherches, qui ont bien sûr des interactions mais que pour des raisons de clarté nous choisissons de contextualiser et de présenter séparément :

L'analyse (harmonique) sur les variétés Riemanniennes Le point de départ de mes réflexions sur le sujet a commencé pendant ma thèse de doctorat, lors de laquelle je me suis intéressé aux propriétés de la transformée de Riesz $d\Delta^{-1/2}$ sur une variété Riemannienne (non-compacte). Cet opérateur est sur $\mathbb{R}^n$ le prototype d'opérateur d'intégrale singulière, qui interviennent notamment dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Les propriétés de ces opérateurs, et notamment leur actions sur les espaces L^p, ont beaucoup été étudié dans le cas Euclidien. L'essor de l'analyse géométrique dans les années 80-90 a conduit naturellement à l'étude de tels opérateurs dans le cadre de variétés Riemaniennes (non-compactes). Lorsque la variété a une structure particulière à l'infini, il est possible d'étudier ces opérateurs pseudo-différentiels en utilisant l'analyse microlocale. Cependant, ces techniques, bien qu'elles fournissent des résultats très précis, ne sont pas applicables lorsque la géométrie à l'infini de la variété n'est pas connue avec précision. Ceci est un point important, car en analyse géométrique, bien souvent les hypothèses faites sur la variété sont des hypothèses de courbure (donc, locales), et la géométrie à l'infini de la variété est une inconnue du problème.

En fait, l'action de la transformée de Riesz est lié au comportement des solutions de l'équation de la chaleur, lui-même lié à la courbure de la variété. En fait, les propriétés de cet opérateur –qui est non-local– dépendent de façon subtile de l'interaction entre la courbure de la variété, et la régularité des solutions de l'équation de la chaleur. Les outils nécessaires pour traiter ces questions sont tout aussi bien :

1. des outils d'analyse harmonique.
2. des outils d'analyse sur les variétés, qui sont liés à la courbure.
3. des outils d'EDP.

Une des questions centrale dans cette thématique est de prouver des estimées de régularité optimales pour les solutions de certaines équations de la chaleur, sous des hypothèses de courbure les moins restrictives possibles. Nous pensons que ces outils seront aussi utiles dans l'étude de flots géométriques (en particulier le flot de Ricci), pour lesquels affaiblir les hypothèses de courbure est certainement très significatif.

La théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger Les opérateurs de type Schrödinger ont un rôle central dans mes recherches : ils apparaissent aussi bien dans le contexte d'équation de la chaleur et en relation avec le thème ci-dessus, que dans la théorie des surfaces minimales, où leur spectre est lié à une certaine stabilité de ces surfaces. J'ai aussi étudié les propriétés spectrales de ces opérateurs pour elles-mêmes, principalement lors de mon premier Post-Doctorat au Technion - Israel Institute of Technology (2011-2014). Lors de ce séjour post-doctoral, j'ai commencé une colloboration fructueuse avec Y. Pinchover, autour de questions liés à des inégalités dites de Hardy, qui quantifient la positivité d'un opérateur de Schrödinger. Ces inégalités, qui généralisent l'inégalité de trou spectral pour un opérateur auto-adjoint, interviennent dans de nombreuses questions en analyse linéaire et non-linéaire, et notamment concernant l'asymptotique en temps long des équations de la chaleur. Nous avons développé une théorie générale qui cherche à unifier la myriade d'inégalités disponibles dans la litérature, et montré comment, par une procédure simple et universelle, on peut obtenir de telles inégalités qui soient de plus *optimales*.

Ce thème s'inscrit plus généralement dans la *théorie de la criticalité* pour les opérateurs elliptiques du second degré ; cette théorie est très liée à la théorie du potentiel, et fournit notamment des outils permettant d'étudier la stabilité ou l'instabilité de certaines propriétés comme par exemple l'asymptotique de fonctions de Green, ou encore des fonctions harmoniques pour l'opérateur en question, lorsque cet opérateur est perturbé. Il est bien connu que l'étude des fonctions harmoniques est liée à l'étude des propriétés en temps long du mouvement brownien, et nous notons aussi que parallèlement à l'approche analytique de ces questions, une approche probabiliste a aussi développée, qui permet souvent d'éclairer l'intuition.

Les surfaces minimales Lors de mon séjour post-doctoral d'un an (2014-2015) à l'University of British Columbia (Vancouver), j'ai été amené à interagir avec le groupe de géométrie différentielle, et notamment avec A. Fraser, qui en collaboration avec R. Schoen venait à l'époque de publier plusieurs articles importants sur les surfaces minimales à bord libre dans la boule euclidienne. Un de leur résultats principaux, est qu'en dimension trois on peut construire de telles surfaces ayant genre zero, et un nombre arbitraire de composantes de bord. Leur approche est variationnelle et consiste à minimiser la première valeur propre du Laplacien pour le problème de Steklov au bord. Ces résultats ont entraîné un regain d'intérêt pour l'étude de ces surfaces dans la communauté géométrique, notamment concernant la construction de nouveaux exemples de surfaces minimales à bord libre. Notons aussi que l'étude des propriétés du problème de Steklov en lui-même (optimisation de forme, domaines nodaux, isospectralité, etc) est aussi un domaine actuellement très actif en théorie spectrale.

Mon interaction avec A. Fraser m'a conduit à m'intéresser à des questions de stabilités pour ces surfaces, et plus précisément à comprendre comment leur indice de Morse, qui quantifie leur degré d'instabilité d'un point de vue variationnel, est relié à leur complexité topologique (genre, nombre de composantes de bord). Ces questions sont très liées à l'étude du spectre d'opérateurs de Schrödinger géométriques, c'est-à-dire dont le potentiel est relié à la courbure, avec différentes conditions au bord (Steklov, Robin, etc).

Liste de (pré-)publications

Articles publiés ou acceptés dans des revues internationales avec comité de lecture

1. *On the finiteness of the Morse index for Schrödinger operators*, Manuscripta Math. **139** (1-2), 2012, pp. 249-271.
2. avec M. Fraas and Y. Pinchover, *Optimal Hardy-type inequalities for elliptic operators*, C. R. Acad. Sc. Paris **350** (2012), 475–479.
3. *A Gaussian estimate for the heat kernel on differential forms and application to the Riesz transform*, Math. Ann. **358** (2014), no. 1-2, 25–68.
4. avec M. Fraas and Y. Pinchover, *Optimal hardy weight for second-order elliptic operator : an answer to a problem of Agmon*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 4422–4489.
5. *Hardy inequalities and spectrum*, J. Math. Pures Appl. (9) **102** (2014), no. 5, 813–853.
6. *A perturbation result for the Riesz transform*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XIV (2015), 937–964.
7. avec Y. Pinchover, *Optimal L^p Hardy inequalities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **33** (2016), no. 1, 93–118.
8. avec Y. Pinchover and G. Psaradakis, *Optimal Hardy inequalities in cones*, Proc. Royal Soc. Edinburgh A **147** (2017), no. 1, 89–124.
9. *Hardy spaces and heat kernel regularity*, Potential Anal.**48** (2018), no. 1, 1–33.
10. avec T. Coulhon and A. Sikora, *Gaussian heat kernel estimates : from functions to forms*, à paraître à J. reine angew. Math., DOI 10.1515/crelle-2018-0021
11. *Heat kernel and Riesz transform of Schrödinger operators*, à paraître à Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 46 p.
12. *Index of the critical catenoid*, à paraître à Geom. Dedicata, https ://doi.org/10.1007/s10711-018-0353-2

Articles soumis

13. *Gradient estimates of the heat kernel*, arXiv :1803.10015, 67 p.
14. *An eigenvalue problem for free boundary minimal surfaces in the ball*, arXiv :1901.01530, 17 p.

Articles en préparation

15. avec E. Russ, *Hardy spaces on manifolds with quadratic curvature decay*
16. avec A. Sikora, *Riesz transform on forms for connected sums*
17. avec S. Beckus, *An improved Shnol-type theorem*

Conférences et invitations

Invitations à l'étranger

- (2019) Trois semaines, Maquarie University, Sydney (invité par A. Sikora)
- (2019) Une semaine, Université de Brescia (invité par H. Kovarik)
- (2018) Une semaine, Czech Technical University, Prague (invité par D. Krecjirik)
- (2017) Une semaine, Insitut J. Fourier (Grenoble) (invité par E. Russ)
- (2016) Deux semaines, University of British Columbia, Vancouver (invité par A. Fraser)
- (2016) Une semaine, Université de Montpellier (invité par P. Castillon)
- (2014) Un mois, ANU, Canberra (invité par T. Coulhon et A. Sikora)
- (2014) Une semaine, Università del'Insubria, Como (Italy) (invité par S. Pigola)

Exposés dans des conférences internationales

- (2018) Workshop "Analysis of Differential Operators", Freiburg
- (2018) Ricci flow, mean curvature flow and related singular flows, Hamburg
- (2018) Conference in honor of M. Marcus 80th brithday
- (2017) Geometric Analysis in Roscoff, France
- (2017) Contemporary aspects of analysis, Cyprus
- (2016) Geometric analysis on Riemannian and singular metric measure spaces, Como (Italy)
- (2013) Mini-symposium "Functional Inequalities" at the International Conference of Applied Mathematics (Heraklion, Crete)
- (2013) New trends in harmonic analysis at the ICMAT (Madrid)
- (2012) FIRST Workshop (Mount Zion Hotel, Jerusalem)
- (2011) Workshop "Geometric Analysis II", Grenoble

Bilan des activités de recherche (après la thèse)

Dans cette section, nous décrivons de façons plus précise, nos contributions dans chacun des 3 thèmes présentés ci-dessus.

6.1 L'analyse (harmonique) sur les variétés Riemanniennes

Dans ce paragraphe, M designera une variété complète, non-compacte. J'ai essentiellement considéré trois questions reliées à ce thème :

(i) l'étude de divers transformées de Riesz.

(ii) les propriétés des solutions d'équations de type "équation de la chaleur".

(iii) l'étude d'espaces de Hardy de formes différentielles et la décomposition de Hodge L^p.

En fait, il se trouve que pour étudier les questions (i) et (ii) même dans le cas le plus simple (transformée de Riesz scalaire $d\Delta^{-1/2}$ ou équation de la chaleur scalaire $(\partial_t + \Delta)u = 0$), il est utile de considérer le cas plus général de transformée de Riesz et d'équations de la chaleur sur les formes différentielles. Cette approche remonte à l'article fondateur de Bakry en 1985 sur la transformée de Riesz : pour étudier l'action de $d\Delta^{-1/2}$ sur L^p, $p > 2$, il est nécessaire de considérer l'équation de la chaleur $(\partial_t + \vec{\Delta}_1)\omega = 0$, où ω est une 1-forme et $\vec{\Delta}_1 = dd^* + d^*d$ est le Laplacien de Hodge sur les 1-formes. La formule de Bochner-Weitzenböck :

$$\vec{\Delta}_1 = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric}$$

permet de considérer $\vec{\Delta}_1$ comme un "opérateur de type Schrödinger", avec un "potentiel" (à valeurs vectorielles) Ric qui s'identifie à la courbure de Ricci. Ceci m'a conduit naturellement à étudier les opérateurs vectoriels de la forme $\vec{L} := \nabla^*\nabla + R$; par le passé, leur étude était faite en comparant $\vec{L}$ à l'opérateur de Schrödinger *scalaire* $\Delta + V$, où $V(x)$ est la plus petite valeur propre de la matrice symmétrique $R(x)$. Notre principale contribution en ce qui concerne le problème (ii), est l'étude de l'asymptotique des solutions de ces équations de la chaleur vectorielles dans un contexte géométrique, *sans se ramener au cas scalaire*, et en utilisant à la place des techniques de perturbations nouvelles, qui donnent des résultats optimaux. Nous avons découvert dans [10] et [11] que l'hypothèse cruciale pour cela est une petitesse intégrale -de type classe de Kato- pour le terme de courbure R à l'infini. L'introduction de ce genre de conditions intégrales, qui est assez répandu dans la communauté des EDP, est une avancée en soit pour ce qui concerne l'analyse géométrique. Ces classes de Kato ont depuis été utilisées dans plusieurs contextes géométriques (inégalités isopérimétriques, estimations du volume, estimations des nombres de Betti) ; elles constituent un substitut à des hypothèses intégrales de courbure du type $\mathrm{Ric} \in L^q$, beaucoup considérées dans la littérature mais qui sont mal adaptées lorsque M ne vérifie pas d'inégalité de Sobolev globale. Revenant au problème (ii), nous avons obtenu les résultats suivants :

— ([3],[10]) le semi-groupe de la chaleur $e^{-t\vec{L}}$ a un comportement Euclidien, *si et seulement si* l'équation $\vec{L}\omega = 0$ n'a pas de solution non-nulle $\omega \in L^2$.

— ([13]) le semi-groupe de la chaleur $e^{-t\vec{L}}$, en projection orthogonale sur le complémentaire du noyau L^2 de $\vec{L}$, a un comportement Euclidien.

— ([13]) dans le cas du Laplacien de Hodge $\vec{\Delta}_k$ agissant sur les k-formes différentielles, les dérivées du semi-groupe $(d + d^*)e^{-t\vec{\Delta}_k}$, en projection orthogonale sur le complémentaire des k-formes harmoniques L^2, ont un comportement Euclidien sur L^p ($p > 2$), sous réserve que les projecteurs de Hodge sur les formes exactes et co-exactes soient bornés sur L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

— ([13]) dans le cas scalaire ($k = 0$), nous obtenons les premières estimées ponctuelles de type Euclidiennes pour $\nabla e^{-t\Delta}$ sans restriction topologique sur M ; les exemples de variétés construites sont de type ALE -asymptotiquement localement Euclidiennes.

En ce qui concerne les transformées de Riesz (problème (i)), nous avons mis en évidence dans [10] et [11] l'importance de la *dimension parabolique* de la variété ; cette dimension est par définition le plus petit exposant p tel que M soit p-parabolique, au sens de la théorie du potentiel. Dans le cas $p = 2$, la p-parabolicité est équivalente à la récurrence du mouvement brownien sur M, ou encore à une propriété de Liouville pour les fonctions sur-harmoniques. Si $p \neq 2$, le Laplacien doit être remplacé par le p-Laplacien $\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, qui est non-linéaire (et on perd la caractérisation en terme de mouvement brownien). La p-parabolicité est aussi très liée à la croissance du volume des boules géodésiques dans M, et dans [11] nous avons prouvé des estimées optimales sur la p-capacité des boules géodésiques en présence d'inégalité de doublement inverse pour le volume des boules. Les résultats obtenus dans [6], [10], [11], montrent que si p est inférieur à la dimension parabolique de M, alors le comportement des transformées de Riesz est “stable sous une large classe de perturbations”. Par exemple, un de nos résultats, obtenu dans [11], est le suivant : nous considérons la transformée de Riesz perturbée par un potentiel, $d(\Delta + V)^{-1/2}$, où V a une décroissance (intégrale) suffisamment rapide à l'infini. Nous obtenons que $d(\Delta + V)^{-1/2}$ est borné sur L^p, *si et seulement si* p est strictement inférieur à la dimension parabolique.

Finalement, concernant (iii), dans [9] nous avons étudié certains espaces de Hardy de formes différentielles, introduits en 2006 par P. Auscher, A. McIntosh et E. Russ. Ces espaces sont naturels pour étudier les transformées de Riesz $(d + d^*)\vec{\Delta}_k^{-1/2}$ sur les k-formes différentielles ; leur définition fait intervenir certaines fonctionnelles verticales du semi-groupe de la chaleur, ainsi que des espaces de tentes. Cependant, il est difficile de les caractériser et ils ne sont connus que dans très peu de cas. Dans [9], nous avons étendu à ces espaces une propriété bien connue pour les espaces de Hardy classiques Euclidiens : la transformée de Riesz scalaire est bornée sur L^p *si et seulement si* l'espaces de Hardy H^p de 1-formes exactes s'identifie naturellement à L^p.

6.2 La théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger

Le deuxième axe de mes recherche est la théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger dans un sens large. Soit $P = -\mathrm{div}(A\nabla\cdot) + V$ un opérateur différentiel du second degré sur un domaine d'une variété Riemannienne M. La matrice $A(x)$ est supposée mesurable, localement uniformément elliptique, et le potentiel V dans L^q pour $q > n/2$. Nous noterons q la forme quadratique associée à P, c'est-à-dire vérifiant

$$q(u,u) = \langle Pu, u\rangle, \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Nous supposerons que le spectre de P est inclus dans $[0, +\infty)$, c'est-à-dire que q est positive. Dans la série d'articles [4], [5], [7], et [8], nous étudions des *inégalités de type Hardy* pour P. Ces inégalités quantifient la positivité de la forme quadratique q. Le cas le plus favorable est celui dans où le bas du spectre de P est strictement positif ; dans ce cas, on a l'inégalité de trou spectral :

$$q(u,u) \geq \lambda_0 \int_M u^2,$$

où $\lambda_0 > 0$ est le bas du spectre de P. Dans un tel cas, et si M est non-compacte, on a par exemple convergence à vitesse exponentielle des solutions de l'équation de la chaleur associée à P vers la fonction nulle. Cependant, dans bien des cas, le bas du spectre de P est nul ; dans ce cas, un substitut à l'inégalité de trou spectral est une *inégalité de type Hardy* :

$$q(u,u) \geq \lambda \int_M W(x) u^2(x)\, dx, \tag{H}$$

où le potentiel $W : M \to \mathbb{R}$ est supposé positif. La meilleure constante dans cette inégalité est notée $\lambda_0(M, P, W)$. L'exemple classique d'une telle inégalité est dans le cas où $P = \Delta$ sur $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, et $W(x) = |x|^{-2}$, pour lequel on a $\lambda_0 = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$. Ces inégalités interviennent naturellement dans la théorie de la perturbation par un potentiel : si on considère l'opérateur perturbé $P + V$, où $V : M \to \mathbb{R}$, on peut se demander à quelle condition sur V certaines caractéristiques de P sont préservées par perturbation et se transmettent à L. Y. Pinchover et M. Murata en particulier ont étudié à quelles conditions sur V sont préservées :

— la structure du cone des fonctions positives P-harmoniques.

— l'asymptotique des fonctions de Green.

— l'asymptotique des solutions de l'équation de la chaleur.

Il se trouve que dans bien des cas, l'asymptotique de V à l'infini, "critique" pour la préservation de ces propriétés, correspond au potentiel W dans une certaine inégalité de Hardy. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$ pour $P = \Delta$, si $V(x) \ll |x|^{-2}$ lorsque $x \to \infty$, les fonctions de Green de $\Delta + V$ et de Δ sont équivalentes, alors que ce n'est pas le cas dès que $|x|^{-2} \lesssim V(x)$, $x \to \infty$. Il est par conséquent important de déterminer ce seuil "critique" de perturbation. Dans [4] et [5], nous avons introduit une notion *d'optimalité* (asymptotique) pour une inégalité de Hardy , correspondant à un potentiel de Hardy W ayant une croissance "critique". Une des caractéristiques importante des potentiels de Hardy optimaux (asymptotiquement), que nous avons mis en évidence, est que le spectre de $\frac{1}{W}P$ est égal à $[\lambda_0, +\infty)$, où $\lambda_0 = \lambda_0(M, P, W)$ est la meilleure constante dans (H). Nous avons également fourni une procédure simple et universelle pour construire de telles inégalités de Hardy : si u_1 et u_2 sont deux fonctions P-superharmoniques positives, et si l'on forme $v = u_1^{1/2} u_2^{1/2}$, alors $W := Pv/v$ vérifie l'inégalité de Hardy (H) avec $\lambda = 1$. Ceci permet de retrouver simplement et de façon unifiée la plupart des exemples de la littérature. Un exemple d'application de nos résultats est le suivant : si $u_1 = G$ est une fonction de Green de P et $u_2 = u$ est P-harmonique et telle que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)(x)}{u(x)} = 0,$$

alors l'inégalité de Hardy (H) avec $W = \frac{|\nabla(G/u)|^2}{|G/u|^2}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$ est optimale. Dans le cas d'un domaine à bord, utilisant les fonctions de Poisson au lieu des fonctions de Green, nous obtenons des inégalités de Hardy optimales avec singularité au bord du domaine, plutôt qu'à l'intérieur. Ces résultats ont été partiellement étendu au cas non-linéaire d'inégalités de Hardy L^p (sans les résultats sur le spectre) dans l'article [7] ; dans l'article [8] nous étudions le cas d'un domaine à bord, avec un opérateur P à coefficients singuliers au bord.

6.3 Les surfaces minimales

Mon troisième axe de recherche concerne les surfaces minimales, et plus précisément les surfaces minimales à bord libre dans la boule Euclidienne $\mathbb{B}^3$ de dimension 3. Par définition, une surface minimale à bord libre de $\mathbb{B}^3$ est une surface minimale incluse dans la boule unité, dont le bord est contenu dans la sphère unité, et qui intersecte celle-ci orthogonalement. Ces surfaces présentent des similarités avec les surfaces minimales (sans bord) dans la sphère S^3 de dimension 3. L'exemple le plus frappant de cette similarité est peut-être le fait que dans les deux cas, des exemples peuvent être construit en résolvant un problème de maximisation de valeur propre : partant d'une surface abstraite et maximisant la première valeur propre (normalisée) du Laplacien sur l'ensemble des métriques Riemmaniennes sur cette surface, fournit –pourvu que le maximum soit atteint par une métrique lisse– une immersion minimale de la surface dans une certaine sphère

Euclidienne. Dans le cas d'une surface à bord, en maximisant la première valeur propre normalisée pour le problème de Steklov au bord fournit, dans le cas où le maximum est atteint, une immersion minimale dans une certaine boule Euclidienne. Rappelons que σ est valeur propre pour le problème au bord de Steklov sur Σ, avec function propre u si

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Sigma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u \text{ on } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Ces résultats sont dus respectivement à Nadirashvili et El Soufi-Ilias (dans le cas d'une surface fermée), et Fraser-Schoen (dans le cas d'une surface à bord). L'existence de métriques maximisantes (dans le cas à bord ou non) a été très récemment résolu, cependant on ne sait toujours pas si toutes ses surfaces peuvent être réalisées comme surfaces minimales de S^3 ou $\mathbb{B}^3$: on obtient en général une immersion dans une sphère ou une boule Euclidienne, mais on ne sait pas controler sa dimension –sauf en genre zero pour lequel Fraser-Schoen ont montré que la boule est de dimension 3. Lorsque la surface a genre zero et 2 composantes de bord (un anneau topologique), l'unique métrique maximisante est un morceau de caténoïde appelé le *caténoïde critique*, et hormis le disque unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{B}^3$, c'est l'exemple le plus simple de telle surface. Dans le cas de surfaces minimales, la surface la plus simple topologiquement, outre la sphère géodésique $S^2 \subset S^3$, est un tore, le *tore de Clifford*.

Il est bien connu que la complexité topologique d'une surface est relié à sa complexité d'un point de vue variationnel, caractérisée par son *indice de Morse* (la dimension de l'espace des "paramètres" permettant de déformer la surface en faisant décroître infinitésimallement l'aire). Il se trouve que le tore de Clifford a une caractérisation en terme d'indice de Morse, due à F. Urbano : la sphère S^2 exceptée, c'est l'unique surface minimale de S^3 d'indice de Morse minimal (égal à 5). Cette propriété a été utilisée par Coda-Marques et Neves dans leur preuve de la conjecture de Willmore. Il est naturel de se demander si le caténoïde critique peut aussi être caractérisé de telle manière. Dans [12], nous obtenons :

— l'indice de toute surface minimale de $\mathbb{B}^3$ à bord libre qui n'est pas un disque plat, est au moins 4.
— le caténoïde critique a indice égal à 4.

Ainsi, le caténoïde critique réalise le minimum de l'indice sur l'ensemble des surfaces mnimales à bord libre qui ne sont pas des disques. De façon surprenante, la partie la plus difficile est le calcul de l'indice du caténoïde critique. En effet, ce calcul, dans le cas du tore de Clifford, est presque immédiat. D'un point de vue analytique, l'indice de Morse d'une surface minimale à bord libre de $\mathbb{B}^3$ est égal à l'indice de la forme quadratique

$$Q(u,u) = \int_\Sigma (|\nabla u|^2 - |A|^2 u^2) - \int_{\partial\Sigma} u^2, \quad u \in C^\infty(\Sigma),$$

où A désigne la seconde forme fondamentale. Pour une surface minimale sans bord de

S^3, l'indice est simplement égal au nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Jacobi $J = \Delta - |A|^2 - 2$ (qui est aussi un opérateur de Schrödinger). Dans le cas à bord, plusieurs problèmes au bord interviennent (Dirichlet, Robin, Steklov) pour l'opérateur de Jacobi, et le problème devient plus complexe. Un point clef dans le théorème d'Urbano est le fait que quelle que soit la surface minimale de S^3, les 4 composantes du vecteur normales sont fonctions propres (associées à la valeur propre -2) de l'opérateur de Jacobi. Motivé par ce fait, nous avons cherché dans [14] à étendre cette propriété aux surfaces minimales à bord libre dans $\mathbb{B}^3$. Nous obtenons :

— les 3 composantes du vecteur normal sont fonctions propres associées à la valeur -2, pour un certain (nouveau) problème aux valeurs propres, interpolant d'une certaine façon entre le problème de Steklov et le problème de Robin pour $J = \Delta - |A|^2$.

— le fait que Σ a indice 4 peut être caractérisé à l'aide de ce nouveau problème spectral.

Cependant, la généralisation du théorème d'Urbano aux surfaces minimales à bord libre dans $\mathbb{B}^3$ demeure à ce jour ouverte.

Perspectives

Nous présentons maintenant brièvement quelques perspectives de recherche, en lien avec les travaux décrits ci-dessus. Certaines de ces questions sont bien adaptées à des projets de thèse ou de post-doc (en particulier dans la première partie). D'autres sont des questions sur lesquelles je travaille actuellement (les trois preprints en cours), ou sur lesquelles je compte travailler dans un futur proche. Notons aussi que les questions de la première partie ont été soumis en 2018 à l'Israel Science Foundation pour demande de financement (résultats en juillet 2019). Une partie des questions présentées dans le premier thème (notamment la collaboration avec E. Russ) a également été soumise dans le projet ANR RAGE en 2018, qui a obtenu un financement et a commencé en janvier 2019.

7.1 L'analyse (harmonique) sur les variétés Riemanniennes

Équation de la chaleur Une conjecture que nous avons est que la transformée de Riesz scalaire est bornée sur les L^p, $p \in (1, \infty)$, si la courbure de Ricci n'est pas trop négative à l'infini et si la variété a *un seul bout*. Depuis les travaux de Cheeger et Colding dans les années 90, on sait qu'une variété à courbure de Ricci positive a une structure "conique" à l'infini, en un sens très faible ; les cônes *tangent à l'infini* sont des espaces non-régulier, qui ont "courbure de Ricci positive" en un certain sens (au sens de Lott-Villani et Sturm). La convergence vers ces cônes, qui sont des cônes métriques, est seulement au sens de Gromov-Hausdorff. Il est naturel de se demander si une telle convergence entraîne des résultats pour la transformée de Riesz et l'opérateur de la chaleur. Notons que le cas des variété *asymptotiquement coniques*, où la convergence vers un cône est très forte, a été traité en utilisant des techniques d'analyse micro-locales, cependant il est impossible d'utiliser ces outils si la convergence est plus faible. Il serait aussi intéressant de considérer une convergence vers des espaces modèles autre que des cônes (produits tordus, espaces stratifiés).

Transformée de Riesz sur les k-formes Dans le cas scalaire, il est bien connu que des estimées Euclidiennes L^p sur le gradient du noyau de la chaleur sont essentiellement équivalentes au fait que la transformée de Riesz scalaire soit bornée sur L^p. Il est naturel de se demander si cela est vrai aussi pour la transformée de Riesz $(d + d^*)\vec{\Delta}_k^{-1/2}$ sur les k-formes ; dans ce cas, comme nous l'avons montré dans [13] et expliqué dans la partie "Résultats", l'hypothèse naturel est que l'opérateur de la chaleur sur les formes, ainsi que ses dérivées pour $(d+d^*)$, ont des estimées L^p en projection orthogonale sur le complémentaire des formes harmoniques L^2. La présence de formes harmoniques L^2 non-triviale rend ce problème intéressant, et de nouvelles idées sont nécessaires par rapport au cas scalaire classique. Nous conjecturons qu'on peut aussi, sous les mêmes hypothèses sur l'opérateur de la chaleur, montrer une décomposition de Hodge L^p. J'ai commencé à réfléchir sur ces questions avec A. Sikora.

Multipliers Une question naturelle en analyse harmonique est celle de prouver que certains opérateur multiplicatifs ("multipliers") sont bornés sur les espaces L^p. Nous souhaitons considérer cette question dans le cadre du Laplacien de Hodge sur les k-formes : un opérateur multiplicatif est alors de la forme $F(\vec{\Delta}_k)$, où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne complexe. Il est aussi intéressant de considérer ces opérateurs multiplicatifs pour l'opérateur de Dirac $D = d + d^*$, par exemple, si $F(\lambda) = \mathrm{sgn}(\lambda)\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(\lambda$, l'opérateur $F(D)$ est égal à la transformée de Riesz $(d + d^*)\vec{\Delta}_k^{-1/2}$. Pour traiter un opérateur multiplicatif $F(L)$, les résultats disponibles dans la littérature supposent que l'opérateur de la chaleur de L a des estimées Euclidiennes. Comme nous l'avons expliqué plus haut, cette hypothèse n'est pas raisonnable pour $\vec{\Delta}_k$ ou D, qui ont naturellement un noyau L^2.

Espaces de Hardy La question de caractériser les espaces de Hardy de formes différentielles construits par Auscher, McIntosh et Russ en 2007 sous des hypothèses géométriques raisonnable demeure. Même lorsque la variété est Euclidienne en-dehors d'un compact, on ne sait en général pas caractériser ces espaces, même dans le cas des 1-formes. Les cas limites (espaces H^1 et de type BMO) sont particulièrement intéressants. J'ai une collaboration en cours avec E. Russ pour étudier ces questions.

Analyse non-linéaire sur les variétés Il est vraisemblable que nos progrès sur les estimées des opérateurs de la chaleur vectoriels et les espaces de Hardy de formes auront des conséquences pour l'étude d'EDP linéaires sur les variétés, et notamment pour les questions d'existence globale et d'unicité, ainsi que de stabilité. On peut citer deux exemples : l'équation de Navier-Stokes, et le flot de Ricci. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, partant d'une donnée initiale "petite" dans un certain espace fonctionel (de type BMO pour Navier-Stokes), on a existence globale et unicité. Dans le cas du flot de Ricci, la métrique converge vers la métrique Euclidienne. Dans le cas Navier-Stokes, à un niveau technique il importe de contrôler $\nabla e^{-t\vec{\Delta}_1}\mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray (projecteur de Hodge sur les 1-formes co-exactes. Dans le cas du flot de Ricci, on doit contrôler $\nabla e^{-t\Delta_L}$, où Δ_L est un certain opérateur vectoriel (le Laplacien de Lichnerowicz) agissant sur les $(0,2)$-tenseurs symmétriques. Nous espérons pouvoir traiter ces questions dans le cadre de variétés asymptotiquement coniques.

7.2 La théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger

J'ai actuellement une collaboration en cours ([17]) avec S. Beckus, qui était l'an dernier post-doc au Technion et je présente aussi une question ouverte concernant des inégalités fonctionnelles de Hardy-Sobolev.

Théorèmes de type Schnol Il est bien connu que le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de fonctions propres L^2 : sa measure spectrale est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Cependant, les fonctions $e^{i\xi\cdot x}$ satisfont $\Delta e^{i\xi\cdot x} = \lambda e^{i\xi\cdot x}$, $\lambda = |\xi|^2$: ce sont des *fonctions propres généralisées* associées à la valeur λ (qui ne sont pas L^2). Le théorème de Schnol classique affirme que pour un opérateur de Schrödinger $H = \Delta + V$ sur $\mathbb{R}^n$, et sous certaines hypothèse sur le potentiel V, presque tout λ dans le spectre de H admet une fonction propre généralisée à croissance polynomiale. Ce théorème admet une “réciproque”, selon laquelle si $(H - \lambda)u = 0$ (u est fonction propre généralisée) et u est à croissance polynomiale, alors λ est dans le spectre de H. Ces résultats ont été par la suite généralisés aux variétés Riemanniennes et à des opérateurs plus généraux. Les hypothèses les plus générales dans la littérature pour qu'un théorème de Schnol et sa réciproque soient valables sont :

1. une variété à croissance sous-exponentielle du volume.
2. une fonction propre généralisée u à croissance sous-exponentielle.
3. une certaine ultra-contractivité du semi-groupe de la chaleur de H.

Nous avons découvert avec S. Beckus que dans certaines situations, la réciproque du théorème de Schnol est aussi valable lorsque la croissance de la fonction propre généralisée était exponentielle, ou lorsque la croissance du volume était exponentielle. Par exemple, nos argument s'applique dans le cas du Laplacien sur l'espace hyperbolique (on peut bien sûr dans ce cas calculer le spectre par d'autres moyens). Nous cherchons à prouver un théorème de Schnol qui couvrent ces nouvelles situations.

Optimisation de forme pour une inégalité de Hardy-Sobolev Si Ω est un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$, alors l'inégalité de Hardy suivante est vérifiée :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\delta^2}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

où $\delta(x) = d(x, \partial\Omega)$. Cette inégalité est asymptotiquement optimale (au sens de [5]) si Ω a régularité C^1, et de plus on peut montrer qu'on peut améliorer cette inégalité en ajoutant un terme Sobolev :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\delta^2} \geq C(\Omega)\left(\int_\Omega u^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{1-\frac{2}{n}}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

On peut aussi montrer que la constante $C(\Omega)$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive, indépendamment de Ω. La question que nous posons est la suivante : quels sont les domaines optimaux pour cette inégalité, c'est-à-dire pour lesquels la constante $C(\Omega)$ est la plus grande possible ? La conjecture est que les demi-espaces sont les uniques optimiseurs.

7.3 Les surfaces minimales

Dans cette thématique, concernant l'indice des surfaces minimales, nous avons déjà mentionné dans la partie "Résultats", l'extension du théorème d'Urbano au cas des surfaces minimales à bord libre dans la boule $\mathbb{B}^3$. Je réfléchis actuellement à cette question. Une question reliée et intéressante en soit, concerne *l'aire conforme* des surfaces annulaires. Soit Σ un anneau $\{r < |z| < R\}$ dans $\mathbb{C}$, definissons son aire conforme par

$$a_c = \inf_{\varphi} \max_{g \in G} A(g \circ \varphi(\Sigma)),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des $\varphi : \Sigma \to S^2$ conforme, et G est la groupe des transformations conformes de la sphère S^2 (groupe de Möbius). Nous conjecturons que l'aire conforme du catenoïde critique (vu comme un anneau) est atteinte pour $\varphi = N$, l'application de Gauss. Plus généralement, il est intéressant de classifier les anneaux qui sont points critiques de l'aire conforme. T. Rivière a considéré l'analogue de cette question dans le cas des tores de S^3, et a résussi à classifer ceux qui sont points critiques de l'aire conforme. La difficulté vient du fait que la contrainte conforme sur φ rend l'écriture d'une équation d'Euler-Lagrange difficile.

Une autre question très intéressante concerne la maximisation de la première valeur propre normalisée du Laplacien sur une surface (pour le problème de Steklov, dans le cas d'une surface à bord). Nous avons déjà mentionné que des résultats récents établissent l'existence d'une métrique maximisante, fournissant une immersion minimale dans une certaine sphère S^k (dans le cas d'une surface compacte) ou minimale à bord libre dans une certaine boule $\mathbb{B}^k$ (dans le cas d'une surface à bord. Ces immersions étant construites à partir des premières fonctions propres d'une métrique maximale, on peut donner des bornes grossière sur k en fonction de la topologie de la surface (genre et nombre de composantes de bord). Cependant, il serait extrêmement intéressant d'améliorer ces bornes, et de déterminer par exemple si une surface ayant la topologie d'un tore privé d'un disque peut s'immerger minimalement à bord libre dans la boule de dimension 3 (nous conjecturons que non).

Activités d'enseignement

(2015-2019) Au Technion, enseignement de 3 cours magistraux par an (un pour des élèves ingénieurs de license, un en license de Math., et un plus avancé). Au niveau ingénieur : Analyse complexe, Analyse de Fourier. Au niveau License de Math. : Calcul différentiel, Géométrie différentielle, Calcul des variations ; séminaire d'analyse de Fourier. Au niveau Master : Géométrie Riemannienne, cours avancé sur l'équation de la chaleur.

(2014-2015) A l'University of British Columbia : 2 cours magistraux pour élèves ingénieurs (Intégration, Calcul multi-dimensionnel).

(2013) Volontaire pour enseigner un cours (Analyse complexe pour ingénieurs) au Technion.

(2008-2011) 64h de TD et cours-TD lors de mon monitorat à l'Université de Nantes.

J'ai enseigné dans plusieurs langues (anglais, hébreu), et j'ai régulièrement obtenu des évaluations très positives de mon enseignement par les étudiants (moyenne d'environ 80/100 sur mes 5 années d'enseignement au Technion et à l'UBC). J'ai aussi participé en 2018-2019 à la création de nouveaux programmes d'enseignement, pour le cours "Calcul différentiel".

Vulgarisation

(2018) Exposé sur l'interpolation au "Pizza and Beer seminar" du Département de Mathématiques.

(2016) Exposé sur la théorie spectrale au "Club Mathématique" du Technion.

(2014) Bénévole à l'évènement "Maths and Games" pour enfants à Vancouver.